

Fourier-Transformation

Synthesegleichung

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_C(\omega) \cos(\omega t) + F_S(\omega) \sin(\omega t)) d\omega$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = F_C(\omega) - iF_S(\omega) \\ F_C(\omega) &= \mathcal{F}_C(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2}(F(\omega) + F(-\omega)) & F_C(\omega) &= F_C(-\omega) \\ F_S(\omega) &= \mathcal{F}_S(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = \frac{i}{2}(F(\omega) - F(-\omega)) & F_S(\omega) &= -F_S(-\omega) \end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \rightsquigarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Konjugation

$$\overline{f(t)} \rightsquigarrow \overline{F(-\omega)} \qquad \overline{f(-t)} \rightsquigarrow \overline{F(\omega)}$$

Streckung

$$f(\alpha t) \rightsquigarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \qquad \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \rightsquigarrow F(\alpha \omega)$$

Argumentverschiebung

$$f(t + t_0) \rightsquigarrow \exp(i\omega t_0) F(\omega) \qquad \exp(-i\omega_0 t) f(t) \rightsquigarrow F(\omega + \omega_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \rightsquigarrow F(-\omega)$$

Differentiation

$$\frac{d^m}{dt^m} f(t) \rightsquigarrow (i\omega)^m F(\omega) \qquad (-it)^m f(t) \rightsquigarrow \frac{d^m}{d\omega^m} F(\omega)$$

Integration

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt \rightsquigarrow (i\omega)^{-1} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega) \qquad (-it)^{-1} f(t) + \frac{1}{2} f(0) \delta(t) \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\omega) d\omega$$

Faltung

$$\text{Definition: } f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \qquad F(\omega) \star G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) G(\omega - \theta) d\theta$$

$$\text{Beziehung: } f(t) \star g(t) \rightsquigarrow F(\omega) G(\omega) \qquad 2\pi f(t) g(t) \rightsquigarrow F(\omega) \star G(\omega)$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t))(\omega) &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f(-t))(\omega) = 2\pi \overline{\mathcal{F}^{-1}(\overline{f(t)})}(\omega) & \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(F(-\omega))(t) = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}(\overline{F(\omega)})}(t) \\ F(t) &\rightsquigarrow 2\pi f(-\omega) & \frac{1}{2\pi} F(-t) &\rightsquigarrow f(\omega) \end{aligned}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (|F_C(\omega)|^2 + |F_S(\omega)|^2) d\omega$$

Fourier-Transformation für periodische Funktionen (Ω Spektrallinienabstand)

Synthesegleichung

$$f(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ik\Omega t) = \frac{\Omega}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (F_C(k) \cos(k\Omega t) + F_S(k) \sin(k\Omega t))$$

Analysegleichungen

$$F(k) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t) \exp(-ik\Omega t) dt = F_C(k) - iF_S(k)$$

$$F_C(k) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t) \cos(k\Omega t) dt = \frac{1}{2} (F(k) + F(-k)) \quad F_C(k) = F_C(-k)$$

$$F_S(k) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t) \sin(k\Omega t) dt = \frac{i}{2} (F(k) - F(-k)) \quad F_S(k) = -F_S(-k)$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \longleftrightarrow \alpha F(k) + \beta G(k)$$

Konjugation

$$\overline{f(t)} \longleftrightarrow \overline{F(-k)} \quad \overline{f(-t)} \longleftrightarrow \overline{F(k)}$$

Streckung

$$f(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha} F(k) \quad [\text{mit } \Omega_{\text{neu}} = \alpha \Omega_{\text{alt}}] \quad \alpha f(t) \longleftrightarrow F(\alpha k) \quad [\text{mit } \Omega_{\text{neu}} = \alpha \Omega_{\text{alt}}]$$

Argumentverschiebung

$$f(t + t_0) \longleftrightarrow \exp(ik\Omega t_0) F(k) \quad \exp(-ik_0\Omega t) f(t) \longleftrightarrow F(k + k_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$$

Differentiation

Definition: $\Delta F(k) = F(k) - F(k - 1)$

Beziehung: $\frac{d^m}{dt^m} f(t) \longleftrightarrow (ik\Omega)^m F(k) \quad (1 - \exp(i\Omega t))^m f(t) \longleftrightarrow \Delta^m F(k)$

Integration

$$\int_x^{x+t} f(t) dt \longleftrightarrow (ik\Omega)^{-1} F(k) \quad (1 - \exp(i\Omega t))^{-1} f(t) \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^k F(k)$$

Faltung

Definition: $f(t) \star g(t) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad F(k) \star G(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} F(\kappa) G(k - \kappa)$

Beziehung: $f(t) \star g(t) \longleftrightarrow F(k) G(k) \quad \frac{2\pi}{\Omega} f(t) g(t) \longleftrightarrow F(k) \star G(k)$

Parsevalsche Gleichung

$$\int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} |f(t)|^2 dt = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 = \frac{\Omega}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (|F_C(k)|^2 + |F_S(k)|^2)$$

Fourier-Transformation für zeitdiskrete Funktionen (T Funktionswertabstand)

Synthesegleichung

$$f(n) = \frac{T}{2\pi} \int_x^{x+\frac{2\pi}{T}} F(\omega) \exp(i\omega nT) d\omega = \frac{T}{\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{T}} (F_C(\omega) \cos(\omega nT) + F_S(\omega) \sin(\omega nT)) d\omega$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \exp(-i\omega nT) = F_C(\omega) - iF_S(\omega) \\ F_C(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cos(\omega nT) = \frac{1}{2} (F(\omega) + F(-\omega)) & F_C(\omega) &= F_C(-\omega) \\ F_S(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \sin(\omega nT) = \frac{i}{2} (F(\omega) - F(-\omega)) & F_S(\omega) &= -F_S(-\omega) \end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Konjugation

$$\overline{f(n)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(-\omega)} \qquad \overline{f(-n)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(\omega)}$$

Streckung

$$f(\alpha n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) \quad [\text{mit } T_{\text{neu}} = \alpha T_{\text{alt}}] \qquad f(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\alpha\omega) \quad [\text{mit } T_{\text{neu}} = \alpha T_{\text{alt}}]$$

Argumentverschiebung

$$f(n + n_0) \quad \longleftrightarrow \quad \exp(i\omega n_0 T) F(\omega) \qquad \exp(-i\omega_0 n T) f(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega + \omega_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \quad \longleftrightarrow \quad F(-\omega)$$

Differentiation

Definition: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$

Beziehung: $\Delta^m f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1 - \exp(-i\omega T))^m F(\omega) \qquad (-inT)^m f(n) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^m}{d\omega^m} F(\omega)$

Integration

$$\sum_{n=-\infty}^n f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1 - \exp(-i\omega T))^{-1} F(\omega) \qquad (-inT)^{-1} f(n) \quad \longleftrightarrow \quad \int_x^{x+\omega} F(\omega) d\omega$$

Faltung

Definition: $f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu) g(n - \nu) \qquad F(\omega) \star G(\omega) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{T}} F(\theta) G(\omega - \theta) d\theta$

Beziehung: $f(n) \star g(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) G(\omega) \qquad \frac{2\pi}{T} f(n) g(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) \star G(\omega)$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_x^{x+\frac{2\pi}{T}} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{T}{\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{T}} (|F_C(\omega)|^2 + |F_S(\omega)|^2) d\omega$$

Diskrete Fourier-Transformation

(Ω Spektrallinienabstand, T Funktionswerteabstand, N Funktionswerte in einer Periode: $\Omega TN = 2\pi$)

Synthesgleichung

$$f(n) = \mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}(F(k))(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left(ikn \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \left(F_C(k) \cos\left(kn \frac{2\pi}{N}\right) + F_S(k) \sin\left(kn \frac{2\pi}{N}\right) \right)$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned} F(k) &= \mathcal{F}_{\text{DFT}}(f(n))(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left(-ikn \frac{2\pi}{N}\right) = F_C(k) - iF_S(k) \\ F_C(k) &= \mathcal{F}_{\text{DFT}_C}(f(n))(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos\left(kn \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}(F(k) + F(-k)) & F_C(k) &= F_C(-k) \\ F_S(k) &= \mathcal{F}_{\text{DFT}_S}(f(n))(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \sin\left(kn \frac{2\pi}{N}\right) = \frac{i}{2}(F(k) - F(-k)) & F_S(k) &= -F_S(-k) \end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha F(k) + \beta G(k)$$

Konjugation

$$\overline{f(n)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(-k)} \qquad \overline{f(-n)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(k)}$$

Streckung

$$f(\alpha n) \quad \longleftrightarrow \quad F(k) \quad \left[\text{mit } N_{\text{neu}} = \frac{1}{\alpha} N_{\text{alt}} \right] \qquad \alpha f(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\alpha k) \quad \left[\text{mit } N_{\text{neu}} = \frac{1}{\alpha} N_{\text{alt}} \right]$$

Argumentverschiebung

$$f(n + n_0) \quad \longleftrightarrow \quad F(k) \exp\left(ikn_0 \frac{2\pi}{N}\right) \qquad f(n) \exp\left(-ik_0 n \frac{2\pi}{N}\right) \quad \longleftrightarrow \quad F(k + k_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \quad \longleftrightarrow \quad F(-k)$$

Differentiation

$$\begin{aligned} \text{Definition: } \Delta f(n) &= f(n) - f(n-1) & \Delta F(k) &= F(k) - F(k-1) \\ \text{Beziehung: } \Delta^m f(n) &\quad \longleftrightarrow \quad \left(1 - \exp\left(-ik \frac{2\pi}{N}\right)\right)^m F(k) & \left(1 - \exp\left(in \frac{2\pi}{N}\right)\right)^m f(n) &\quad \longleftrightarrow \quad \Delta^m F(k) \end{aligned}$$

Integration

$$\sum_{n=0}^n f(n) \quad \longleftrightarrow \quad \left(1 - \exp\left(-ik \frac{2\pi}{N}\right)\right)^{-1} F(k) \qquad \left(1 - \exp\left(in \frac{2\pi}{N}\right)\right)^{-1} f(n) \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^k F(k)$$

Faltung

$$\begin{aligned} \text{Definition: } f(n) \star g(n) &= \sum_{\nu=0}^{N-1} f(\nu)g(n-\nu) & F(k) \star G(k) &= \sum_{\kappa=0}^{N-1} F(\kappa)G(k-\kappa) \\ \text{Beziehung: } f(n) \star g(n) &\quad \longleftrightarrow \quad F(k)G(k) & Nf(n)g(n) &\quad \longleftrightarrow \quad F(k) \star G(k) \end{aligned}$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{DFT}}(f(n))(k) &= N \mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}(f(-n))(k) = \overline{N \mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}(\overline{f(n)})(k)} & \mathcal{F}_{\text{DFT}}^{-1}(F(k))(n) &= \frac{1}{N} \mathcal{F}_{\text{DFT}}(F(-k))(n) = \overline{\frac{1}{N} \mathcal{F}_{\text{DFT}}(\overline{F(k)})(n)} \\ F(n) &\quad \longleftrightarrow \quad Nf(-k) & \frac{1}{N} F(-n) &\quad \longleftrightarrow \quad f(k) \end{aligned}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)|^2 = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \left(|F_C(k)|^2 + |F_S(k)|^2 \right)$$

Laplace-Transformation

Synthesegleichung

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \exp(st) ds$$

Analysegleichungen

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

0 (einseitig)
-∞ (zweiseitig)

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Konjugation

$$\overline{f(t)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(s)}$$

Streckung

$$f(\alpha t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad \longleftrightarrow \quad F(\alpha s)$$

Argumentverschiebung

einseitig:

$$t_0 \geq 0 \quad f(t + t_0) \quad \longleftrightarrow \quad \exp(st_0) \left(F(s) - \int_0^{t_0} f(t) \exp(-st) dt \right) \quad \exp(-s_0 t) f(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s + s_0)$$

$$t_0 \leq 0 \quad f(t + t_0) \quad \longleftrightarrow \quad \exp(st_0) F(s)$$

$$\text{zweiseitig: } f(t + t_0) \quad \longleftrightarrow \quad \exp(st_0) F(s)$$

Argumentumkehr

zweiseitig:

$$f(-t) \quad \longleftrightarrow \quad F(-s)$$

Differentiation

$$\text{einseitig: } \frac{d^m}{dt^m} f(t) \quad \longleftrightarrow \quad s^m F(s) - \sum_{r=0}^{m-1} s^{m-r-1} \frac{d^r}{dt^r} f(0) \qquad (-t)^m f(t) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^m}{d\omega^m} F(s)$$

$$\text{zweiseitig: } \frac{d^m}{dt^m} f(t) \quad \longleftrightarrow \quad s^m F(s)$$

Integration

$$\text{einseitig: } \int_0^t f(t) dt \quad \longleftrightarrow \quad s^{-1} F(s) \qquad t^{-1} f(t) \quad \longleftrightarrow \quad \int_s^{\infty} F(s) ds$$

$$\text{zweiseitig: } \int_{-\infty}^t f(t) dt \quad \longleftrightarrow \quad s^{-1} F(s)$$

Faltung

Definition:

$$\text{einseitig: } f(t) \star g(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$\text{zweiseitig: } f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$F(s) \star G(s) = \left\{ \int_{\sigma_F - i\infty}^{\sigma_F + i\infty} F(\sigma) G(s - \sigma) d\sigma, \int_{\sigma_G - i\infty}^{\sigma_G + i\infty} F(\sigma - s) G(\sigma) d\sigma \right\}$$

$$\text{Beziehung: } f(t) \star g(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) G(s)$$

$$2\pi i f(t) g(t) \quad \longleftrightarrow \quad F(s) \star G(s)$$

Z-Transformation ($z = \exp(sT)$)

Synthesegleichung

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}(F(z))(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z)z^{n-1} dz$$

Analysegleichungen

$$F(z) = \mathcal{Z}(f(n))(z) = \sum_{n=\begin{cases} 0 & \text{(einseitig)} \\ -\infty & \text{(zweiseitig)} \end{cases}}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \quad \longleftrightarrow \quad \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Konjugation

$$\overline{f(n)} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{F(\overline{z})}$$

Streckung

$$f(\alpha n) \quad \longleftrightarrow \quad F\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad \alpha^{-n} f(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(\alpha z)$$

Argumentverschiebung

einseitig:

$$n_0 > 0 \quad f(n + n_0) \quad \longleftrightarrow \quad z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n)z^{-n} \right)$$

$$n_0 \leq 0 \quad f(n + n_0) \quad \longleftrightarrow \quad z^{n_0} F(z)$$

$$\text{zweiseitig: } f(n + n_0) \quad \longleftrightarrow \quad z^{n_0} F(z)$$

Argumentumkehr

$$\text{zweiseitig: } f(-n) \quad \longleftrightarrow \quad F(z^{-1}) \quad (-1)^n f(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(-z)$$

Differentiation

Definition: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$

Beziehung:

$$\text{einseitig: } \Delta^m f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1-z^{-1})^m F(z) - z \sum_{r=0}^{m-1} (1-z^{-1})^{m-r-1} \Delta^r f(0) \quad (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!} f(n) \quad \longleftrightarrow \quad z^m \frac{d^m}{dz^m} F(z)$$

$$\text{zweiseitig: } \Delta^m f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1-z^{-1})^m F(z)$$

Integration

$$\text{einseitig: } \sum_{n=0}^n f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1-z^{-1})^{-1} F(z) \quad n^{-1} f(n) \quad \longleftrightarrow \quad \int_z^{\infty} \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

$$\text{zweiseitig: } \sum_{n=-\infty}^n f(n) \quad \longleftrightarrow \quad (1-z^{-1})^{-1} F(z)$$

Faltung

Definition:

$$\text{einseitig: } f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=0}^n f(\nu)g(n-\nu) \quad F(z) \star G(z) = \left\{ \oint F(\zeta)G(z-\zeta)d\zeta, \oint F(\zeta-z)G(\zeta)d\zeta \right\}$$

$$\text{zweiseitig: } f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int f(\nu)g(n-\nu)$$

$$\text{Beziehung: } f(n) \star g(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(z)G(z) \quad 2\pi i f(n)g(n) \quad \longleftrightarrow \quad F(z) \star G(z)$$