Kreisel-Bewegungen

Die Bewegungsgleichung der Rotation eines beliebigen starren Körpers ist die Euler-Gleichung. Sie drückt diese Bewegung in dem körperfesten Koordinatensystem K aus (mit Drehmoment $\mathbf{M}$, Drehimpuls $\mathbf{L}$ und Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$):

$$^K\mathbf{M} = {}^K\dot{\mathbf{L}} + {}^K\boldsymbol{\omega} \times {}^K\mathbf{L} \tag{1}$$

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ kann mit dem Trägheitstensor $\underline{\mathbf{J}}$ und dem Rotationsgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ beschrieben werden. Im körperfesten Koordinatensystem K ist $\underline{\mathbf{J}}$ konstant:

$$\mathbf{L} = \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

Damit wird Gleichung (1) zu

$$^K\mathbf{M} = {}^K\underline{\mathbf{J}} \cdot {}^K\dot{\boldsymbol{\omega}} + {}^K\boldsymbol{\omega} \times \left({}^K\underline{\mathbf{J}} \cdot {}^K\boldsymbol{\omega}\right) \tag{3}$$

Die Lösung $\boldsymbol{\omega}$ dieses Systems von drei Differentialgleichungen ist die gesuchte Bewegung eines beliebigen Kreisels.

Für die folgende Darstellung wird ein symmetrischer Kreisel (z.B. eine kreisrunde Scheibe) angenommen, so daß sich der Trägheitstensor vereinfacht:

$$^K\underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & J_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

1 Nutation

Unter Nutation versteht man die kräftefreie Rotationsbewegung eines starren Körpers, so daß $\mathbf{M} = 0$. Es handelt sich also um die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

1.1 Im körperfesten Koordinatensystem K

Gleichung (3) liefert das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= J_{xy}\,{}^K\dot{\omega}_x + \left(J_z - J_{xy}\right)\,{}^K\omega_y\,{}^K\omega_z \\ 0 &= J_{xy}\,{}^K\dot{\omega}_y - \left(J_z - J_{xy}\right)\,{}^K\omega_x\,{}^K\omega_z \\ 0 &= J_z\,{}^K\dot{\omega}_z \end{aligned} \tag{5}$$

Als Lösung ergibt sich die Nutationsbewegung $\boldsymbol{\omega}_n^K$ ausgedrückt in Koordinaten des Systems K als ${}^K\boldsymbol{\omega}_n^K$. Sie beschreibt die Bewegung des Systems K relativ zu B:

$$
\begin{aligned}
{}^K\boldsymbol{\omega}_n^K &= \begin{pmatrix} A\cos(\omega_N^K t + \psi) \\ A\sin(\omega_N^K t + \psi) \\ {}^K\omega_z \end{pmatrix} &(6)\\
\boldsymbol{\omega}_N^K &:= \frac{J_z - J_{xy}}{J_{xy}}\boldsymbol{\omega}_z &(7)
\end{aligned}
$$

mit A als Amplitude der Nutationsbewegung und ψ der Phasenlage. Beide sind von Anfangs- bzw. Randwerten abhängig. Die Rotationsfrequenz des Körpers um seine z-Achse ist konstant. Die Größe $\boldsymbol{\omega}_N^K$ heißt Nutationsfrequenz. Sie beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit der im Basissytem feste Drehimpulsvektor ${}^K\mathbf{L}$ im System K um die körperfeste z-Achse taumelt.

Diese Betrachtung gilt in dem vollständig mitbewegten Koordinatensystem K, das sich also mit ω_z um seine z-Achse dreht.

1.2 In einem Zwischensystem Z

Es erfolgt eine weitere Betrachtung in einem Zwischensystem Z, das zwar die Körperbewegung um dessen x- und y-Achsen mitmacht, allerdings um die z-Achse relativ zu B fest ist. Dies ist möglich, da ${}^K\boldsymbol{\omega}_z = \text{const}$. In diesem Fall ändern sich die Differentialgleichungen wie folgt. Es wird hierbei weiterhin der Bezeichner ω_z verwendet, da die Größe konstant ist und eine klare Bedeutung auch im System Z hat:

$$
\begin{aligned}
0 &= J_{xy}\,{}^Z\dot{\omega}_x + J_z\,{}^Z\omega_y\omega_z \\
0 &= J_{xy}\,{}^Z\dot{\omega}_y - J_z\,{}^Z\omega_x\omega_z
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Als Lösung ergibt sich die Nutationsbewegung $\boldsymbol{\omega}_n^Z$ ausgedrückt in Koordinaten des Systems Z als ${}^Z\boldsymbol{\omega}_n^Z$. Sie beschreibt die Bewegung des Systems Z relativ zu B:

$$
\begin{aligned}
{}^Z\boldsymbol{\omega}_n^Z &= \begin{pmatrix} A\cos(\omega_N^Z t + \psi) \\ A\sin(\omega_N^Z t + \psi) \\ 0 \end{pmatrix} &(9)\\
\boldsymbol{\omega}_N^Z &:= \frac{J_z}{J_{xy}}\boldsymbol{\omega}_z &(10)
\end{aligned}
$$

Die Nutationsfrequenz $\boldsymbol{\omega}_N^Z$ beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit der im Basissytem feste Drehimpulsvektor ${}^K\mathbf{L}$ im System Z um die körperfeste z-Achse taumelt.

Dasselbe Ergebnis kann auch direkt aus (7) anschaulich abgeleitet werden. Da das System K gegenüber Z mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_z$ um die gemeinsame z-Achse rotiert, besitzt jede Rotationsgeschwindigkeit um diese Achse einen Versatz von $\boldsymbol{\omega}_z$. Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{\omega}_N^Z = \boldsymbol{\omega}_N^K + \boldsymbol{\omega}_z$$

1.3 Im Basiskoordinatensystem B

Für einen externen Beobachter aus System B ergibt sich eine weitere unterschiedliche Nutationsfrequenz $\boldsymbol{\omega}_N^B$. Eine Koordinatentransformation ergibt die Taumelbewegung der körperfesten z-Achse sowie der Rotationsachse $\boldsymbol{\omega}_n^K$ um die im Basissystem B feste Gesamtdrehimpulsachse $\mathbf{L}$.

Der Gesamtdrehimpuls kann als Summe zweier Terme ausgedrückt werden. Mit (2) und (4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= J_{xy}\boldsymbol{\omega}_n^K + \left(J_z - J_{xy}\right)\boldsymbol{\omega}_z \\ \mathbf{L} &= J_{xy}\boldsymbol{\omega}_n^Z + J_z\boldsymbol{\omega}_z \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen der Euler-Gleichung (1) gilt für die Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_z$ in Richtung der körperfesten z-Achse folgende Beziehung, in die (11) für $\boldsymbol{\omega}_n^K$ eingesetzt wird (identische Vorgehensweise für $\boldsymbol{\omega}_n^Z$ möglich):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_z &= \boldsymbol{\omega}_n^K \times \boldsymbol{\omega}_z \\ &= \left(\frac{\mathbf{L}}{J_{xy}} - \frac{J_z - J_{xy}}{J_{xy}}\boldsymbol{\omega}_z\right) \times \boldsymbol{\omega}_z \\ &= \frac{\mathbf{L}}{J_{xy}} \times \boldsymbol{\omega}_z \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die Nutationsbewegung $\boldsymbol{\omega}_n^B$ ausgedrückt in Koordinaten des Systems B als ${}^B\boldsymbol{\omega}_n^B$. Sie beschreibt die Bewegung des Systems Z relativ zu B:

$${}^B\boldsymbol{\omega}_n^B = \begin{pmatrix} A\cos(\omega_N^B t + \psi) \\ A\sin(\omega_N^B t + \psi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\omega}_N^B := \frac{\mathbf{L}}{J_{xy}} \tag{13}$$

2 Präzession

Präzession ist die Rotationsbewegung eines starren Körpers, die unter äußerer Drehmomenteinwirkung erfolgt, also für $\mathbf{M} \neq 0$. Für diesen Fall werden die homogenen Differentialgleichungen (5) bzw. (8) durch nichthomogene Terme von $\mathbf{M}$ ergänzt. Zu der freien Nutationsbewegung $\boldsymbol{\omega}_n$ kommen so zusätzliche Bewegungsterme hinzu.

Im System K ergibt sich eine Präzessionsbewegung $\boldsymbol{\omega}^K$ mit der Präzessionsgeschwindigkeit

$\boldsymbol{\omega}_P^K$. Sie beschreibt die Bewegung des Systems K relativ zu B:

$$\begin{aligned}
{}^K\boldsymbol{\omega}^K &= {}^K\boldsymbol{\omega}_n^K + \begin{pmatrix} {}^K\omega_{Px}^K \\ {}^K\omega_{Py}^K \\ \int \frac{{}^KM_z}{J_z}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad (14)\\
{}^K\omega_{Px}^K &:= \frac{{}^KM_y}{\left(J_{xy}-J_z\right){}^K\omega_z}\\
{}^K\omega_{Py}^K &:= \frac{-{}^KM_x}{\left(J_{xy}-J_z\right){}^K\omega_z}\\
\mathbf{M} &= \boldsymbol{\omega}_P^K \times \boldsymbol{\omega}_z \left(J_{xy}-J_z\right)
\end{aligned}$$

Im System Z ergibt sich eine Präzessionsbewegung $\boldsymbol{\omega}^Z$ mit der Präzessionsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_P^Z$. Sie beschreibt die Bewegung des Systems Z relativ zu B:

$$\begin{aligned}
{}^Z\boldsymbol{\omega}^Z &= {}^Z\boldsymbol{\omega}_n^Z + \begin{pmatrix} {}^Z\omega_{Px}^Z \\ {}^Z\omega_{Py}^Z \\ \int \frac{{}^ZM_z}{J_z}\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad (15)\\
{}^Z\omega_{Px}^Z &:= \frac{-{}^ZM_y}{J_z\,{}^K\omega_z}\\
{}^Z\omega_{Py}^Z &:= \frac{{}^ZM_x}{J_z\,{}^K\omega_z}\\
\mathbf{M} &= \boldsymbol{\omega}_P^Z \times \boldsymbol{\omega}_z J_z
\end{aligned}$$

Während die Rotation um die z-Achse durch ein angreifendes Drehmoment M_z lediglich gewöhnlich beschleunigt wird, erfahren die beiden anderen Achsen eine um 90° zum angreifenden Moment versetzte gleichförmige Bewegung. Diese Bewegung heißt Präzession. Zu beachten ist, daß bei der Bewegung nach (14) das Moment ${}^K\mathbf{M}$ im Koordinatensystem K gegeben sind, was einem mit dem Körper mitrotierten Moment entspricht. Bei (15) bedeutet ein konstantes ${}^Z\mathbf{M}$ ein in Z festes Moment.