Mengen

Mengen	$\mathring{M}=\{A \mid A \text{ ist Menge}\}$	$A=\{x \mid E_A(x)\}=\{a_1,a_2,\ldots\} \Leftrightarrow (E_A(x)\Leftrightarrow x\in A)$
Leere Menge	$\emptyset=\{x \mid \text{false}\}=\{\}$	
Element	$a\in A \Leftrightarrow E_A(a)$	$a\notin A \Leftrightarrow \neg E_A(a)$
Teilmenge	$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(a\in A\Rightarrow a\in B)$	
Gleichheit	$(A=B)\Leftrightarrow(a\in A\Leftrightarrow a\in B)\Leftrightarrow(A\subseteq B\wedge A\supseteq B)$	

Vereinigung	$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$		
Durchschnitt	$A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$		
relativiertes Komplement	$A\setminus B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$		
Komplement	$\overline{A}=U\setminus A$	$U=$ Alles bzw. Universum	
Konkatenation	$A\circ B=AB=\{a\circ b=ab \mid a\in A \wedge b\in B\}$	$A^n=A\ldots A=\{a_1\ldots a_n \mid \forall(i\in\mathbb{N} \mid 1<i<n): a_i\in A\}$	
Kleene-Star	$A^*=\bigcup_{n\geq 0} A^n$	$A^+=\bigcup_{n\geq 1} A^n$	
Potenzmenge	$P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}$	$\lvert P(A)\rvert=2^{\lvert A\rvert}$	
Mächtigkeit	$\lvert A\rvert=n\in\mathbb{N}$	$n=$ Zahl der Elemente in A	
	$\lvert\mathbb{N}\rvert=\aleph_0$	$\lvert\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rvert=\aleph_0$	$\lvert P(\mathbb{N})\rvert=\aleph_1$

Relationen

Karthesisches Produkt	$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$	$\lvert A\times B\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$
Relation	$R\subseteq(A\times B)$	
linkstotal	$\forall a\in A:\ \exists b\in B:\ (a,b)\in(A\times B)$	
rechtstotal	$\forall b\in B:\ \exists a\in A:\ (a,b)\in(A\times B)$	
linkseindeutig	$((a,b)\in(A\times B) \wedge (a',b)\in(A\times B)) \Rightarrow (a=a')$	
rechtseindeutig	$((a,b)\in(A\times B) \wedge (a,b')\in(A\times B)) \Rightarrow (b=b')$	

partielle Funktion	Relation ∧ rechtseindeutig
Funktion	partielle Funktion ∧ linkstotal
injektiv	linkseindeutig ∧ rechtseindeutig
surjektiv = total	linkstotal ∧ rechtstotal
bijektiv	injektiv ∧ surjektiv

zweistellige Relation auf A	$Q\subseteq(A\times A)$
reflexiv	$\forall a\in A:\ (a,a)\in Q$
symmetrisch	$(a,b)\in Q \Leftrightarrow (b,a)\in Q$
antisymmetrisch	$((a,b)\in Q \wedge (b,a)\in Q) \Rightarrow (a=b)$
transitiv	$((a,b)\in Q \wedge (b,c)\in Q) \Rightarrow (a,c)\in Q$

Äquivalenzordnung	reflexiv ∧ transitiv ∧ symmetrisch
partielle Ordnung	reflexiv ∧ transitiv ∧ antisymmetrisch
lineare Ordnung	partielle Ordnung ∧ total

Sprachen

Alphabete: $\mathring{A} = \{A \in \mathring{M} \mid 0 < |A| < \aleph_0\}$

Sprachen: $\mathring{L} = \{L \subseteq A^* \mid A \in \mathring{A}\}$

$\mathring{L} \supset L_0 \supset L_{\text{entscheidbar}} \supset L_1 \supset L_2 \supset L_{\text{Det.kf.}} \supset L_3$ $\overline{H} \in \mathring{L} \;\wedge\; \overline{H} \notin L_0$ $|\mathring{L}| = |\mathbb{R}|$ $|L_0| = |\mathbb{N}|$

Chomsky-Hierarchie

Typ 0 $L_0 \subset \mathring{L}$ $H \in L_0 \;\wedge\; H \notin L_1$

⇔ darstellbar durch Typ 0-Grammatik
⇔ semi-entscheidbar
⇔ rekursiv aufzählbar
⇔ erkennbar durch TM ⇔ DTM

Abgeschlossen: $\cup\cap\circ *$
Problementscheidbarkeit: -

Typ 1 $L_1 \subset L_0$ $L_1 x = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in L_1 \;\wedge\; L_1 x \notin L_2$

⇔ darstellbar durch Typ 1-Grammatik
⇔ kontextsensitiv
⇔ erkennbar durch LBA $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ DLBA

Abgeschlossen: $\cup\cap\circ *^-$
Problementscheidbarkeit: Wort ∈ NP-hart: $O(2^n)$

Typ 2 $L_2 \subset L_1$ $L_2 x = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in L_2 \;\wedge\; L_2 x \notin L_3$

⇔ darstellbar durch Typ 2-Grammatik
⇔ kontextfrei
⇔ durch (E)BNF darstellbar
⇔ erkennbar durch PDA (aber nicht DPDA)

Abgeschlossen: $\cup\circ *$
Problementscheidbarkeit: Wort: $O(n^3)$, Leer

Deterministisch Kontextfreie Sprachen $L_2 x = \{a^n \$ b^n \mid n \geq 1\} \in L_2 \;\wedge\; L_2 x \notin L_3$

⇔ darstellbar durch LR(k)-Grammatik
⇔ erkennbar durch DPDA

Abgeschlossen: $^-$
Problementscheidbarkeit: Wort: $O(n)$, Leer, Äquivalent

Typ 3 $L_3 \subset L_2$ $L_3 x = \{a^n \mid n \geq 1\} \in L_3$

⇔ darstellbar durch Typ 3-Grammatik
⇔ regulär
⇔ darstellbar durch regulären Ausdruck
⇔ erkennbar durch DFA ⇔ NFA

Abgeschlossen: $\cup\cap\circ *^-$
Problementscheidbarkeit: Wort: $O(n)$, Leer, Äquivalent ∈ NP-hart, Schnitt, Endlich

Pumping-Lemma

$$L_x \in L_2 \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}: \;\forall\left(z \in L_x \mid |z| \geq n\right): \;\exists u, v, w, x, y: \;(z = uvwxy) \wedge (|vx| \geq 1) \wedge (|vwx| \leq n) \wedge \left(\forall i \in \mathbb{N}: \; uv^i w x^i y \in L_x\right)$$

$$L_x \in L_3 \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N}: \;\forall\left(z \in L_x \mid |z| \geq n\right): \;\exists w, x, y: \;(z = wxy) \wedge (|x| \geq 1) \wedge (|wx| \leq n) \wedge \left(\forall i \in \mathbb{N}: \; w x^i y \in L_x\right)$$

Grammatiken

$G = (V, \Sigma, P, S)$

- $V \in \mathring{A}$: Variablen
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Terminalalphabet $\quad V \cap \Sigma = \emptyset$
- $P \subset ((V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*)$: Regeln
- $S \in V$: Startvariable

$$\underset{G}{\Rightarrow} \subseteq ((V \cup \Sigma^*) \times (V \cup \Sigma)^*)$$

$$(xyz \underset{G}{\Rightarrow} xy'z) \Leftrightarrow ((y, y') \in P)$$

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \} \in L_0$$

Typ 0 = Phrasenstruktur	$G_0 = G$	$P \subset ((V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*)$
Typ 1 = kontextsensitiv	$G_1 \subset G_0$	$P \subset ((V \cup \Sigma)^{i \geq 1} \times (V \cup \Sigma)^{j \geq i})$
Kuroda Normalform		$P \subset (V \times (V \cup VV \cup \Sigma)) \cup (VV \times VV)$
Typ 2 = kontextfrei	$G_2 \subset G_1$	$P \subset (V \times (V \cup \Sigma)^+)$
Chomsky Normalform (CNF)		$P \subset (V \times (VV \cup \Sigma))$
Greibach Normalform (GNF)		$P \subset (V \times (\Sigma V^{i \geq 0}))$
Typ 3 = regulär	$G_3 \subset G_2$	$P \subset (V \times (\Sigma \cup \Sigma V))$

Automaten

Turingmaschine = **Deterministische Turingmaschine**

Turingmaschine

$M_{TM} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, z_e)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$: Arbeitsalphabet
- δ: $Z \times \Gamma \to \mathrm{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$: Überführungsf.
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$: Blank
- $z_e \in Z$: Endzustand

$$\underset{M}{\hookrightarrow} \subseteq (\Gamma^* Z \Gamma^* \times \Gamma^* Z \Gamma^*)$$

$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i z' c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, N) \in \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0 \wedge j \geq 1)$$
$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i c z' b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, R) \in \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0 \wedge j \geq 2)$$
$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_{i-1} z' c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, L) \in \delta(z, b_1) \wedge i \geq 1 \wedge j \geq 1)$$
$$(a_1..a_i z b_1 \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i c z' \square)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, R) \in \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0)$$
$$(z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} z' \square c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, L) \in \delta(z, b_1) \wedge j \geq 1)$$

Deterministische Turingmaschine

$M_{DTM} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, z_e)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$: Arbeitsalphabet
- δ: $Z \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$: Überführungsf.
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$: Blank
- $z_e \in Z$: Endzustand

$$\underset{M}{\hookrightarrow} \subseteq (\Gamma^* Z \Gamma^* \times \Gamma^* Z \Gamma^*)$$

$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i z' c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, N) = \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0 \wedge j \geq 1)$$
$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i c z' b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, R) = \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0 \wedge j \geq 2)$$
$$(a_1..a_i z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_{i-1} z' c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, L) = \delta(z, b_1) \wedge i \geq 1 \wedge j \geq 1)$$
$$(a_1..a_i z b_1 \underset{M}{\hookrightarrow} a_1..a_i c z' \square)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, R) = \delta(z, b_1) \wedge i \geq 0)$$
$$(z b_1..b_j \underset{M}{\hookrightarrow} z' \square c b_2..b_j)$$
$$\Leftrightarrow ((z', c, L) = \delta(z, b_1) \wedge j \geq 1)$$

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid z_0 w \overset{*}{\underset{M}{\hookrightarrow}} a z_e b \} \in L_0$$

Linear beschränkte Turingmaschine $\overset{?}{=}$ **Deterministische Linear beschränkte Turingmaschine**

$M_{LBA} \subset M_{TM}$: $M_{DLBA} \subset M_{DTM}$:

$$\forall \left(z \in Z, w \in \Sigma^+, a, b \in \Gamma^* \mid z_0 w \overset{*}{\underset{M}{\hookrightarrow}} azb \right): |ab| = |w|$$

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid z_0 w \overset{*}{\underset{M}{\hookrightarrow}} a z_e b \right\} \in L_1$$

Nichtdeterministischer Kellerautomat $\neq$ **Deterministischer Kellerautomat**

$M_{PDA} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet
- $\Gamma \in \mathring{A}$: Kelleralphabet
- δ: $Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathrm{P}(Z \times \Gamma^*)$: Überführungsf.
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $\# \in \Gamma$: unterstes Kellerzeichen

$$\underset{M}{\hookrightarrow} \subseteq \left((Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \right)$$

$$\left((z, a_1..a_i, b_1..b_j) \underset{M}{\hookrightarrow} (z', a_2..a_i, c_1..c_k b_2..b_j) \right) \Leftrightarrow (z', c_1..c_k) \in \delta(z, a_1, b_1)$$

$$\left((z, a_1..a_i, b_1..b_j) \underset{M}{\hookrightarrow} (z', a_1..a_i, c_1..c_k b_2..b_j) \right) \Leftrightarrow (z', c_1..c_k) \in \delta(z, \varepsilon, b_1)$$

$M_{DPDA} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet
- $\Gamma \in \mathring{A}$: Kelleralphabet
- δ: $Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to Z \times \Gamma^*$: Überführungsf.
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $\# \in \Gamma$: unterstes Kellerzeichen

$$\underset{M}{\hookrightarrow} \subseteq \left((Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \right)$$

$$\left((z, a_1..a_i, b_1..b_j) \underset{M}{\hookrightarrow} (z', a_2..a_i, c_1..c_k b_2..b_j) \right) \Leftrightarrow (z', c_1..c_k) = \delta(z, a_1, b_1)$$

$$\left((z, a_1..a_i, b_1..b_j) \underset{M}{\hookrightarrow} (z', a_1..a_i, c_1..c_k b_2..b_j) \right) \Leftrightarrow (z', c_1..c_k) = \delta(z, \varepsilon, b_1)$$

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid (z_0, w, \#) \overset{*}{\underset{M}{\hookrightarrow}} (z, \varepsilon, \varepsilon) \right\} \in L_2$$

Nichtdeterministischer endlicher Automat $=$ **Deterministischer endlicher Automat**

$M_{NFA} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- δ: $Z \times \Sigma \to \mathrm{P}(Z)$: Überführungsfunktion
- $z_0 \subseteq Z$: Startzustand
- $E \subseteq Z$: Endzustände

$\overset{*}{\delta}$: $\mathrm{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathrm{P}(Z)$

$$\overset{*}{\delta}(Z', \epsilon) = Z'$$

$$\overset{*}{\delta}(Z', axb) = \bigcup_{z \in Z'} \overset{*}{\delta}(\delta(z, a), xb) = \bigcup_{z \in \overset{*}{\delta}(Z', ax)} \delta(z, b)$$

$$L(M_{NFA}) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \overset{*}{\delta}(z_0, w) \cap E \neq \emptyset \right\} \in L_3$$

$M_{DFA} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

- $Z \in \mathring{A}$: Zustände
- $\Sigma \in \mathring{A}$: Eingabealphabet $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- δ: $Z \times \Sigma \to Z$: Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$: Startzustand
- $E \subseteq Z$: Endzustände

$\overset{*}{\delta}$: $Z \times \Sigma^* \to Z$

$$\overset{*}{\delta}(z, \epsilon) = z$$

$$\overset{*}{\delta}(z, axb) = \overset{*}{\delta}(\delta(z, a), xb) = \delta\left(\overset{*}{\delta}(z, ax), b\right)$$

$$L(M_{DFA}) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid \overset{*}{\delta}(z_0, w) \in E \right\} \in L_3$$

Berechenbarkeit

$f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist Turingberechenbar $\Leftrightarrow \exists M \in M_{TM}: \forall x, y \in \Sigma^*: \left(f(x) = y \Leftrightarrow z_0 x \overset{*}{\underset{M}{\hookrightarrow}} \square \ldots \square z_e y \square \ldots \square \right)$

intuitiv berechenbar (Churchsche These)
= Turingberechenbar
= WHILE-berechenbar
= GOTO-berechenbar
= μ-rekursiv berechenbar
⊃ primitiv rekursiv berechenbar
= LOOP-berechenbar

Halteproblem

Codierte Turingmaschine: $MC = \{ w \mid w$ enthält die Beschreibung einer Turingmaschine $\Leftrightarrow M_w \in M_{TM} \}$

spezielles Halteproblem: $K = \left\{ w \in MC \mid \exists a, b \in M_w.\Gamma^*: z_0 w \overset{*}{\underset{M_w}{\hookrightarrow}} a z_e b \right\}$

allgemeines Halteproblem: $H = \left\{ w\#x \in MC\#M_w.\Sigma \mid \exists a, b \in M_w.\Gamma^*: z_0 x \overset{*}{\underset{M_w}{\hookrightarrow}} a z_e b \right\}$

Reduzierbarkeit: $A \subseteq \Sigma_1^* \leq B \subseteq \Sigma_2^* \Leftrightarrow \exists f: \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*: \forall x \in \Sigma_1^*: (x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$

polynomial reduzierbar: $A \leq_p B \Leftrightarrow A \leq B \wedge f \in P$

Komplexität

Rechenschritte

$time_M : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ $\quad time_M(w) =$ Rechenschritte von M auf w

$ntime_M: \Sigma^* \to \mathbb{N}$ $\quad ntime_M(w) = \begin{cases} \min(\text{Rechnenschritte von M auf w}), & w \in L(M) \\ 0, & w \notin L(M) \end{cases}$

Komplexitätsklassen

semi-entscheidbar ⊃ entscheidbar ⊃ LOOP-berechenbar ⊃ NP $\overset{?}{\supseteq}$ P

deterministisch: $TIME(f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}) = \{ A \in \mathring{L} \mid \exists M \in M_{DTM}: A = L(M) \wedge time_M(w) \leq f(|w|) \}$

nichtdeterministisch: $NTIME(f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}) = \{ A \in \mathring{L} \mid \exists M \in M_{TM} : A = L(M) \wedge ntime_M(w) \leq f(|w|) \}$

Komplexitätsklasse P: $P = \bigcup_{f \in Polynom} TIME(f)$ $\qquad P \overset{?}{=} NP$

Komplexitätsklasse NP: $NP = \bigcup_{f \in Polynom} NTIME(f) \subseteq \bigcup_{f \in Polynom} TIME(2^f)$

$NP-hart = \{ A \mid \forall L \in NP: L \leq_p A \} = NP-vollständig \cup PSPACE-vollständig$

$NP-vollständig = NP \cap NP-hart$

$PSPACE-vollständig = \overline{NP} \cap NP-hart$

O-Kalkül

$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}: \forall (n \in \mathbb{N} \mid n > n_0): f(n) \leq c \cdot g(n)$