Fourier-Transformation

Synthesegleichung

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(F(\omega)\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(F_C(\omega)\cos(\omega t) + F_S(\omega)\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}\omega$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) &&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t &&= F_C(\omega) - \mathrm{i}F_S(\omega) && && \\
F_C(\omega) &= \mathcal{F}_C\left(f(t)\right)(\omega) &&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t &&= \tfrac{1}{2}\left(F(\omega) + F(-\omega)\right) && F_C(\omega) &&= F_C(-\omega) \\
F_S(\omega) &= \mathcal{F}_S\left(f(t)\right)(\omega) &&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t &&= \tfrac{\mathrm{i}}{2}\left(F(\omega) - F(-\omega)\right) && F_S(\omega) &&= -F_S(-\omega)
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Konjugation

$$\overline{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(-\omega) \qquad\qquad \overline{f}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(\omega)$$

Streckung

$$f(\alpha t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \qquad\qquad \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\alpha\omega)$$

Argumentverschiebung

$$f(t + t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{i}\omega t_0)F(\omega) \qquad\qquad \exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega + \omega_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega)$$

Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\omega)^m F(\omega) \qquad\qquad (-\mathrm{i}t)^m f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m}F(\omega)$$

Integration

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}\omega)^{-1}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \qquad\qquad (-\mathrm{i}t)^{-1}f(t) + \frac{1}{2}f(0)\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{-\infty}^{\omega} F(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Faltung

Definition: $f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad F(\omega) \star G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)G(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta$

Beziehung: $f(t) \star g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega) \qquad 2\pi f(t)g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) \star G(\omega)$

Symmetrie

$$\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}\left(f(-t)\right)(\omega) = 2\pi\overline{\mathcal{F}^{-1}\left(\overline{f}(t)\right)}(\omega) \qquad \mathcal{F}^{-1}\left(F(\omega)\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(F(-\omega)\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}\left(\overline{F}(\omega)\right)}(t)$$

$$F(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi f(-\omega) \qquad\qquad \frac{1}{2\pi}F(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad f(\omega)$$

Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(|F_C(\omega)|^2 + |F_S(\omega)|^2\right)\mathrm{d}\omega$$

Fourier-Transformation für periodische Funktionen (Ω Spektrallinienabstand)

Synthesegleichung

$f(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) \exp(\mathrm{i}k\Omega t) = \frac{\Omega}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (F_C(k)\cos(k\Omega t) + F_S(k)\sin(k\Omega t))$

Analysegleichungen

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t)\exp(-\mathrm{i}k\Omega t)\mathrm{d}t &&= F_C(k) - \mathrm{i}F_S(k) \\
F_C(k) &= \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t)\cos(k\Omega t)\mathrm{d}t &&= \tfrac{1}{2}(F(k)+F(-k)) && F_C(k) = F_C(-k) \\
F_S(k) &= \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(t)\sin(k\Omega t)\mathrm{d}t &&= \tfrac{\mathrm{i}}{2}(F(k)-F(-k)) && F_S(k) = -F_S(-k)
\end{aligned}
$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \alpha F(k) + \beta G(k)$$

Konjugation

$\overline{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(-k)$ $\qquad$ $\overline{f}(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(k)$

Streckung

$f(\alpha t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\alpha}F(k) \quad [\text{mit } \Omega_{\text{neu}} = \alpha\Omega_{\text{alt}}]$ $\qquad$ $\alpha f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\alpha k) \quad [\text{mit } \Omega_{\text{neu}} = \alpha\Omega_{\text{alt}}]$

Argumentverschiebung

$f(t+t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{i}k\Omega t_0)F(k)$ $\qquad$ $\exp(-\mathrm{i}k_0\Omega t)f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k+k_0)$

Argumentumkehr

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega)$$

Differentiation

Definition: $\qquad \Delta F(k) = F(k) - F(k-1)$

Beziehung: $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}k\Omega)^m F(k)$ $\qquad$ $(1-\exp(\mathrm{i}\Omega t))^m f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \Delta^m F(k)$

Integration

$\int_x^{x+t} f(t)\mathrm{d}t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (\mathrm{i}k\Omega)^{-1}F(k)$ $\qquad$ $(1-\exp(\mathrm{i}\Omega t))^{-1} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{k=-\infty}^{k} F(k)$

Faltung

Definition: $f(t) \star g(t) = \int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ $\qquad$ $F(k) \star G(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\kappa)G(k-\kappa)$

Beziehung: $f(t) \star g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k)G(k)$ $\qquad$ $\frac{2\pi}{\Omega} f(t)g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(k) \star G(k)$

Parsevalsche Gleichung

$$\int_x^{x+\frac{2\pi}{\Omega}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\Omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 = \frac{\Omega}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(|F_C(k)|^2 + |F_S(k)|^2\right)$$

Fourier-Transformation für zeitdiskrete Funktionen (T Funktionswerteabstand)

Synthesegleichung

$$f(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{x}^{x+\frac{2\pi}{T}} F(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega nT)\mathrm{d}\omega = \frac{T}{\pi} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{T}} \left(F_C(\omega)\cos(\omega nT) + F_S(\omega)\sin(\omega nT)\right)\mathrm{d}\omega$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\exp(-\mathrm{i}\omega nT) &&= F_C(\omega) - \mathrm{i}F_S(\omega) && \\
F_C(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\cos(\omega nT) &&= \tfrac{1}{2}\left(F(\omega) + F(-\omega)\right) && F_C(\omega) = F_C(-\omega) \\
F_S(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\sin(\omega nT) &&= \tfrac{\mathrm{i}}{2}\left(F(\omega) - F(-\omega)\right) && F_S(\omega) = -F_S(-\omega)
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

Konjugation

$$\overline{f}(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(-\omega) \qquad\qquad \overline{f}(-n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(\omega)$$

Streckung

$$f(\alpha n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) \quad [\text{mit } T_{\text{neu}} = \alpha T_{\text{alt}}] \qquad f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\alpha\omega) \quad [\text{mit } T_{\text{neu}} = \alpha T_{\text{alt}}]$$

Argumentverschiebung

$$f(n+n_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{i}\omega n_0 T)F(\omega) \qquad\qquad \exp(-\mathrm{i}\omega_0 nT)f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega+\omega_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\omega)$$

Differentiation

Definition: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$

Beziehung: $\Delta^m f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (1-\exp(-\mathrm{i}\omega T))^m F(\omega) \qquad (-\mathrm{i}nT)^m f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m}F(\omega)$

Integration

$$\sum_{n=-\infty}^{n} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (1-\exp(-\mathrm{i}\omega T))^{-1} F(\omega) \qquad (-\mathrm{i}nT)^{-1} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{x}^{x+\omega} F(\omega)\mathrm{d}\omega$$

Faltung

Definition: $f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu)g(n-\nu) \qquad F(\omega) \star G(\omega) = \int_{x}^{x+\frac{2\pi}{T}} F(\theta)G(\omega-\theta)\mathrm{d}\theta$

Beziehung: $f(n) \star g(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)G(\omega) \qquad \frac{2\pi}{T} f(n)g(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega) \star G(\omega)$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 = \frac{T}{2\pi} \int_{x}^{x+\frac{2\pi}{T}} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{T}{\pi} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{T}} \left(|F_C(\omega)|^2 + |F_S(\omega)|^2\right)\mathrm{d}\omega$$

Diskrete Fourier-Transformation

(Ω Spektrallinienabstand, T Funktionswerteabstand, N Funktionswerte in einer Periode: $\Omega T N = 2\pi$)

Synthesegleichung

$$f(n) = \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}\left(F(k)\right)(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)\exp\left(\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}}\left(F_C(k)\cos\left(kn\frac{2\pi}{N}\right) + F_S(k)\sin\left(kn\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

Analysegleichungen

$$\begin{aligned}
F(k) &= \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}\left(f(n)\right)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp\left(-\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N}\right) = F_C(k) - \mathrm{i}F_S(k) \\
F_C(k) &= \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}_C}\left(f(n)\right)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\cos\left(kn\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(F(k)+F(-k)\right) \qquad F_C(k) = F_C(-k) \\
F_S(k) &= \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}_S}\left(f(n)\right)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\sin\left(kn\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(F(k)-F(-k)\right) \qquad F_S(k) = -F_S(-k)
\end{aligned}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F(k) + \beta G(k)$$

Konjugation

$$\overline{f}(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \overline{F}(-k) \qquad \overline{f}(-n) \circ\!\!-\!\!\bullet \overline{F}(k)$$

Streckung

$$f(\alpha n) \circ\!\!-\!\!\bullet F(k) \quad \left[\text{mit } N_{\mathrm{neu}} = \frac{1}{\alpha}N_{\mathrm{alt}}\right] \qquad \alpha f(n) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\alpha k) \quad \left[\text{mit } N_{\mathrm{neu}} = \frac{1}{\alpha}N_{\mathrm{alt}}\right]$$

Argumentverschiebung

$$f(n+n_0) \circ\!\!-\!\!\bullet F(k)\exp\left(\mathrm{i}kn_0\frac{2\pi}{N}\right) \qquad f(n)\exp\left(-\mathrm{i}k_0 n\frac{2\pi}{N}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet F(k+k_0)$$

Argumentumkehr

$$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(-k)$$

Differentiation

Definition: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$ $\qquad$ $\Delta F(k) = F(k) - F(k-1)$

Beziehung: $\Delta^m f(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \left(1-\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{N}\right)\right)^m F(k)$ $\qquad$ $\left(1-\exp\left(\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}\right)\right)^m f(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \Delta^m F(k)$

Integration

$$\sum_{n=0}^{n} f(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \left(1-\exp\left(-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{N}\right)\right)^{-1} F(k) \qquad \left(1-\exp\left(\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}\right)\right)^{-1} f(n) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{k=0}^{k} F(k)$$

Faltung

Definition: $f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=0}^{N-1} f(\nu)g(n-\nu)$ $\qquad$ $F(k) \star G(k) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} F(\kappa)G(k-\kappa)$

Beziehung: $f(n) \star g(n) \circ\!\!-\!\!\bullet F(k)G(k)$ $\qquad$ $Nf(n)g(n) \circ\!\!-\!\!\bullet F(k) \star G(k)$

Symmetrie

$$\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}\left(f(n)\right)(k) = N\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}\left(f(-n)\right)(k) = N\overline{\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}\left(\overline{f}(n)\right)}(k) \qquad \mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}^{-1}\left(F(k)\right)(n) = \frac{1}{N}\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}\left(F(-k)\right)(n) = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}_{\mathrm{DFT}}\left(\overline{F}(k)\right)}(n)$$

$$F(n) \circ\!\!-\!\!\bullet Nf(-k) \qquad \frac{1}{N}F(-n) \circ\!\!-\!\!\bullet f(k)$$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=0}^{N-1}|f(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|F(k)|^2 = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}}\left(|F_C(k)|^2 + |F_S(k)|^2\right)$$

Laplace-Transformation

Synthesegleichung

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(\mathrm{s})\right)(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(\mathrm{s}) \exp(\mathrm{s}t) \mathrm{d}\mathrm{s}$$

Analysegleichungen

$$F(\mathrm{s}) = \mathcal{L}\left(f(t)\right)(\mathrm{s}) = \int\limits_{\substack{0 \quad \text{(einseitig)} \\ -\infty \quad \text{(zweiseitig)}}}^{\infty} f(t) \exp(-\mathrm{s}t) \mathrm{d}t$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \alpha F(\mathrm{s}) + \beta G(\mathrm{s})$$

Konjugation

$$\overline{f}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(\overline{\mathrm{s}})$$

Streckung

$$f(\alpha t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\mathrm{s}}{\alpha}\right) \qquad\qquad \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\alpha \mathrm{s})$$

Argumentverschiebung

einseitig:

$$t_0 \geq 0 \qquad f(t+t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{s}t_0)\left(F(\mathrm{s}) - \int\limits_0^{t_0} f(t) \exp(-\mathrm{s}t) \mathrm{d}t\right) \qquad \exp(-\mathrm{s}_0 t) f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{s}+\mathrm{s}_0)$$

$$t_0 \leq 0 \qquad f(t+t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{s}t_0) F(\mathrm{s})$$

zweiseitig: $f(t+t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \exp(\mathrm{s}t_0) F(\mathrm{s})$

Argumentumkehr

zweiseitig: $f(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\mathrm{s})$

Differentiation

einseitig:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{s}^m F(\mathrm{s}) - \sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{s}^{m-r-1} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r} f(0) \qquad\qquad (-t)^m f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m} F(\mathrm{s})$$

zweiseitig:

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{s}^m F(\mathrm{s})$$

Integration

einseitig:

$$\int\limits_0^t f(t) \mathrm{d}t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{s}^{-1} F(\mathrm{s}) \qquad\qquad t^{-1} f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int\limits_{\mathrm{s}}^{\infty} F(\mathrm{s}) \mathrm{d}\mathrm{s}$$

zweiseitig:

$$\int\limits_{-\infty}^t f(t) \mathrm{d}t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{s}^{-1} F(\mathrm{s})$$

Faltung

Definition:

einseitig:

$$f(t) \star g(t) = \int\limits_0^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau \qquad\qquad F(\mathrm{s}) \star G(\mathrm{s}) = \left\{ \int\limits_{\sigma_F - \mathrm{i}\infty}^{\sigma_F + \mathrm{i}\infty} F(\sigma) G(\mathrm{s}-\sigma) \mathrm{d}\sigma, \int\limits_{\sigma_G - \mathrm{i}\infty}^{\sigma_G + \mathrm{i}\infty} F(\sigma - \mathrm{s}) G(\sigma) \mathrm{d}\sigma \right\}$$

zweiseitig:

$$f(t) \star g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

Beziehung:

$$f(t) \star g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{s}) G(\mathrm{s}) \qquad\qquad 2\pi \mathrm{i} f(t) g(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{s}) \star G(\mathrm{s})$$

Z-Transformation $(\mathrm{z} = \exp(\mathrm{s}T))$

Synthesegleichung

$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left(F(\mathrm{z})\right)(n) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint F(\mathrm{z})\mathrm{z}^{n-1}\mathrm{d}\mathrm{z}$

Analysegleichungen

$$F(\mathrm{z}) = \mathcal{Z}\left(f(n)\right)(\mathrm{z}) = \sum_{n=\begin{cases} 0 & \text{(einseitig)} \\ -\infty & \text{(zweiseitig)} \end{cases}}^{\infty} f(n)\mathrm{z}^{-n}$$

Rechenregeln

Linearität

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \alpha F(\mathrm{z}) + \beta G(\mathrm{z})$$

Konjugation

$\overline{f}(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \overline{F}(\overline{\mathrm{z}})$

Streckung

$f(\alpha n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F\left(\mathrm{z}^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ $\qquad \alpha^{-n} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\alpha\mathrm{z})$

Argumentverschiebung

einseitig:

$n_0 > 0 \qquad f(n+n_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{z}^{n_0}\left(F(\mathrm{z}) - \sum_{n=0}^{n_0-1} f(n)\mathrm{z}^{-n}\right)$

$n_0 \leq 0 \qquad f(n+n_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{z}^{n_0}F(\mathrm{z})$

zweiseitig: $f(n+n_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{z}^{n_0}F(\mathrm{z})$

Argumentumkehr

zweiseitig: $f(-n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{z}^{-1})$ $\qquad (-1)^n f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(-\mathrm{z})$

Differentiation

Definition: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$

Beziehung:

einseitig: $\Delta^m f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left(1-\mathrm{z}^{-1}\right)^m F(\mathrm{z}) - \mathrm{z}\sum_{r=0}^{m-1}\left(1-\mathrm{z}^{-1}\right)^{m-r-1}\Delta^r f(0)$ $\qquad (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{z}^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\mathrm{z}^m} F(\mathrm{z})$

zweiseitig: $\Delta^m f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left(1-\mathrm{z}^{-1}\right)^m F(\mathrm{z})$

Integration

einseitig: $\sum_{n=0}^{n} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left(1-\mathrm{z}^{-1}\right)^{-1} F(\mathrm{z})$ $\qquad n^{-1} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int_{\mathrm{z}}^{\infty} \frac{F(\mathrm{z})}{\mathrm{z}}\mathrm{d}\mathrm{z}$

zweiseitig: $\sum_{n=-\infty}^{n} f(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \left(1-\mathrm{z}^{-1}\right)^{-1} F(\mathrm{z})$

Faltung

Definition:

einseitig: $f(n) \star g(n) = \sum_{\nu=0}^{n} f(\nu)g(n-\nu)$ $\qquad F(\mathrm{z}) \star G(\mathrm{z}) = \left\{\oint F(\zeta)G(\mathrm{z}-\zeta)\mathrm{d}\zeta, \oint F(\zeta-\mathrm{z})G(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right\}$

zweiseitig: $f(n) \star g(n) = \sum \int_{\nu=-\infty}^{\infty} f(\nu)g(n-\nu)$

Beziehung: $f(n) \star g(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{z})G(\mathrm{z})$ $\qquad 2\pi\mathrm{i} f(n)g(n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\mathrm{z}) \star G(\mathrm{z})$